

Lights-On!

Bekannt aus vielen Phänomentas und dem Gießener Mathematikum



Jetzt mit zehn Tasten und zehn Lampen!
MNU-Workshop mit Klaus Koch (Marburg)

Zur Einführung hier die Spielregeln

1. Jeder Tastendruck kehrt den Zustand der 3 nächst gelegenen Lampen um
2. Zielzustand: alle Lampen sollen an sein
3. Anfangszustand: beliebig (aber nicht Zielzustand)
4. so wenige Tastendrucke wie möglich

Genau wie im Leben:

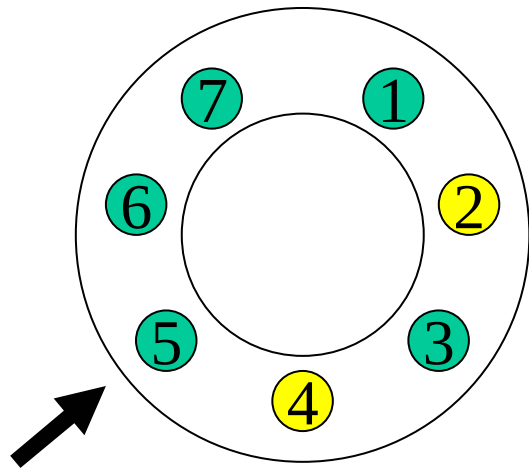
alle Entscheidungen haben Nebenwirkungen
(dort meistens allerdings mehr als zwei).

Aus 1. folgt: drückt man die gleiche Taste erneut,
stellt sich der vorherige Zustand wieder ein.

Übersicht

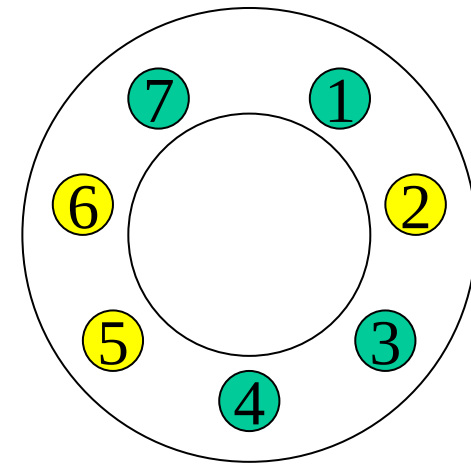
- Einführende Beispiele mit 7 Tasten/LEDs
- Die erweiterte Version
- Lösung mit Mathematik
- Analyse des Spielverlaufs bei zufallsgesteuerten Tastendrücken

Erstes Beispiel



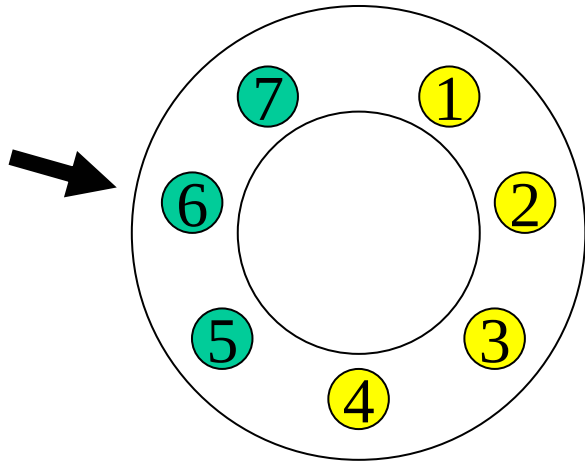
Zustand vorher

Taste 5 wird
gedrückt



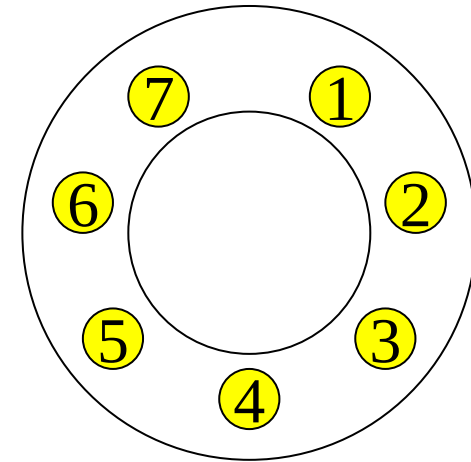
Zustand nachher

Einfachste Situation



Zustand vorher

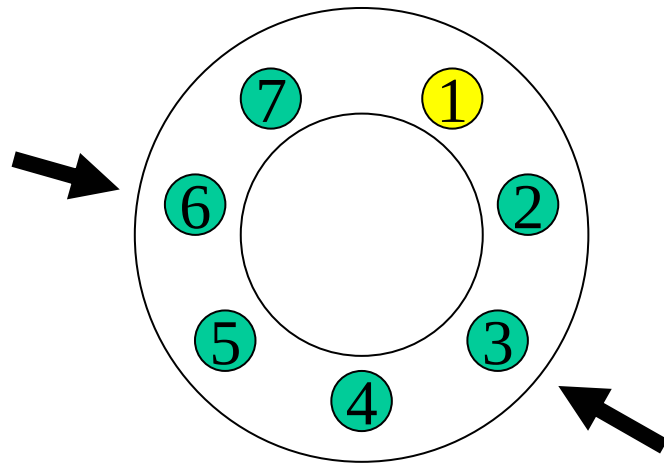
Taste 6 wird gedrückt



Zustand nachher

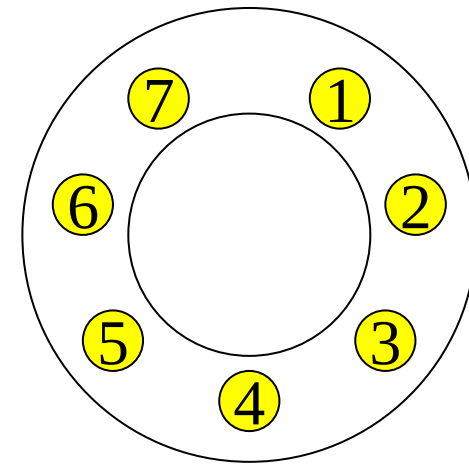
Erfolg!

Etwas schwerer



Zustand vorher

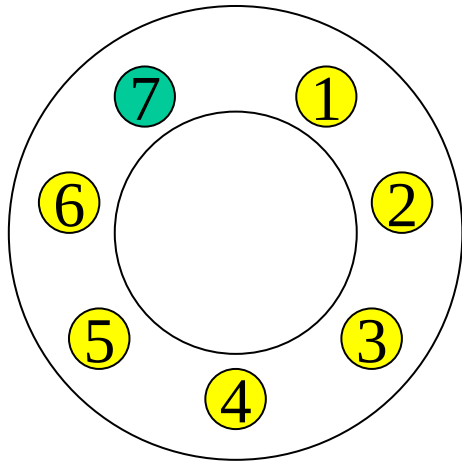
Tasten 3 und 6
werden gedrückt



Zustand nachher

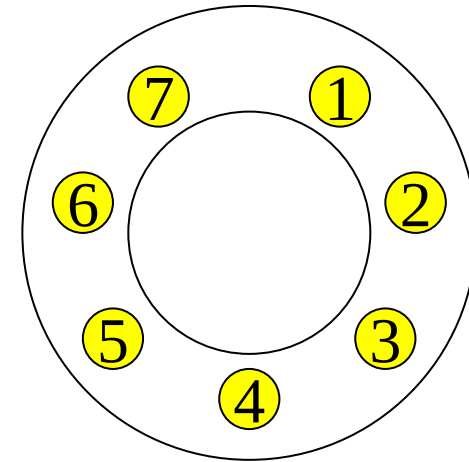
Erfolg!

Noch etwas schwerer



Zustand vorher

Alle außer 2 und 5
werden gedrückt



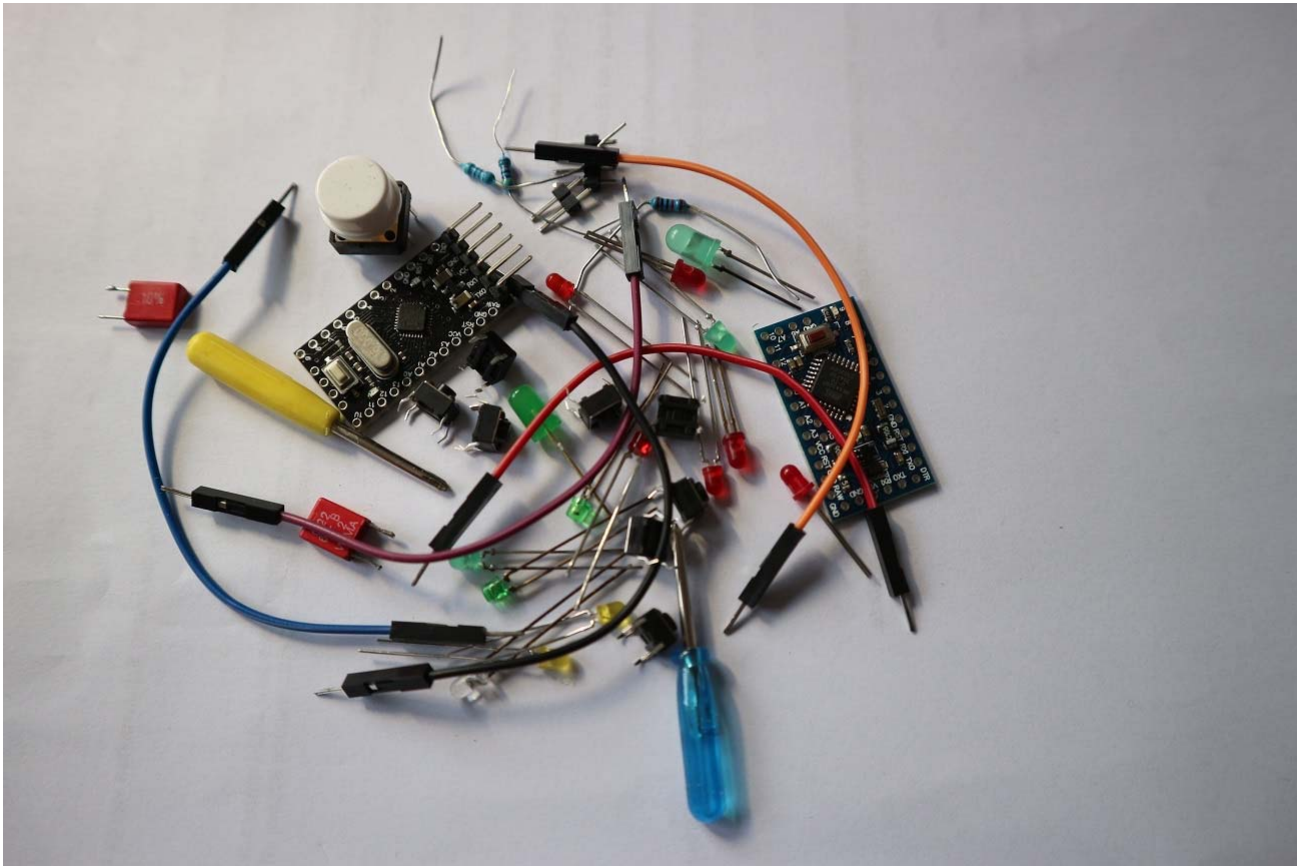
Zustand nachher

Erfolg!

Natürlich geht es auch online

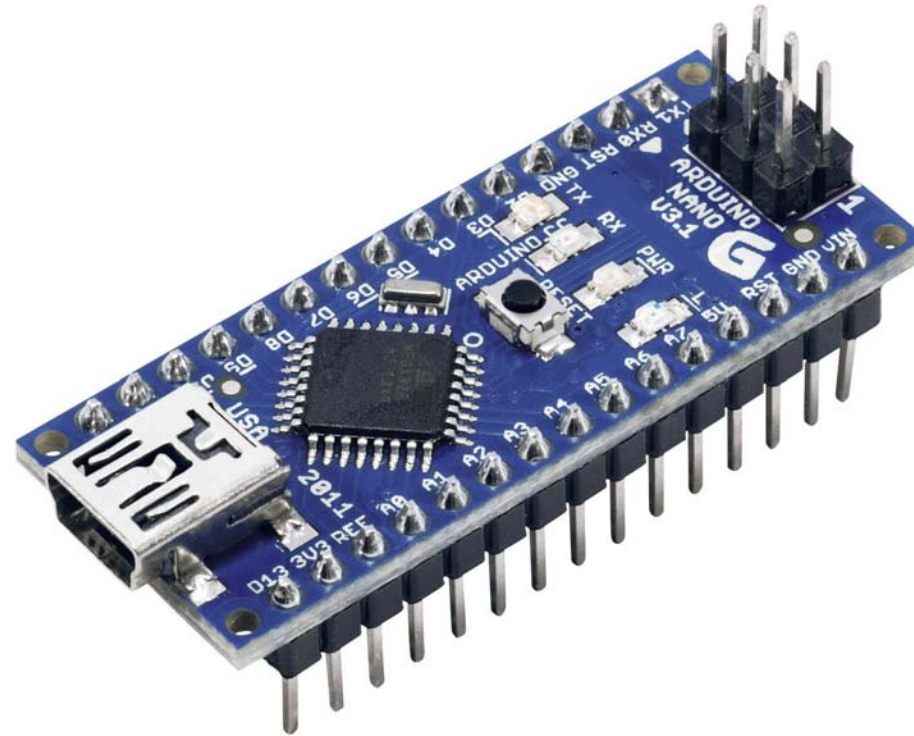


Jetzt wird es technisch ...



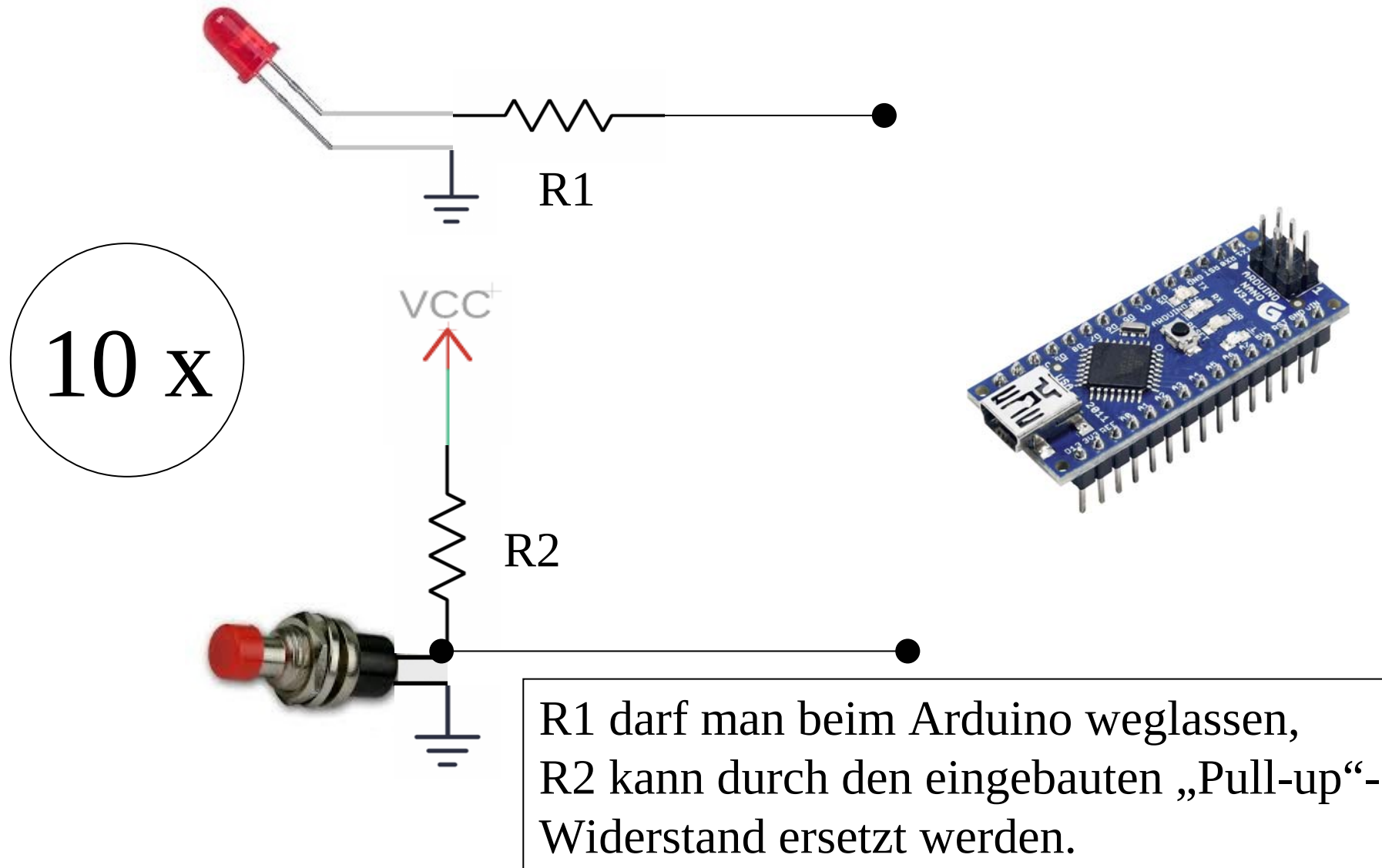
Der LötKolben passt leider nicht mehr ins Bild

Das **digitale** Schweizer Taschenmesser ist der Microcomputer



Arduinos haben zahlreiche Anschlüsse (Pins), können auch reichlich Strom für die LEDs liefern und sind bei Überschreitung der Grenzwerte nicht nachtragend.

Hardware: Wie viel Arbeit ist das?



Reichen die Anschluss-Pins?

- 0 = RX, nicht benutzen!
- 1 = TX, nicht benutzen!
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13 = LED, geht trotzdem

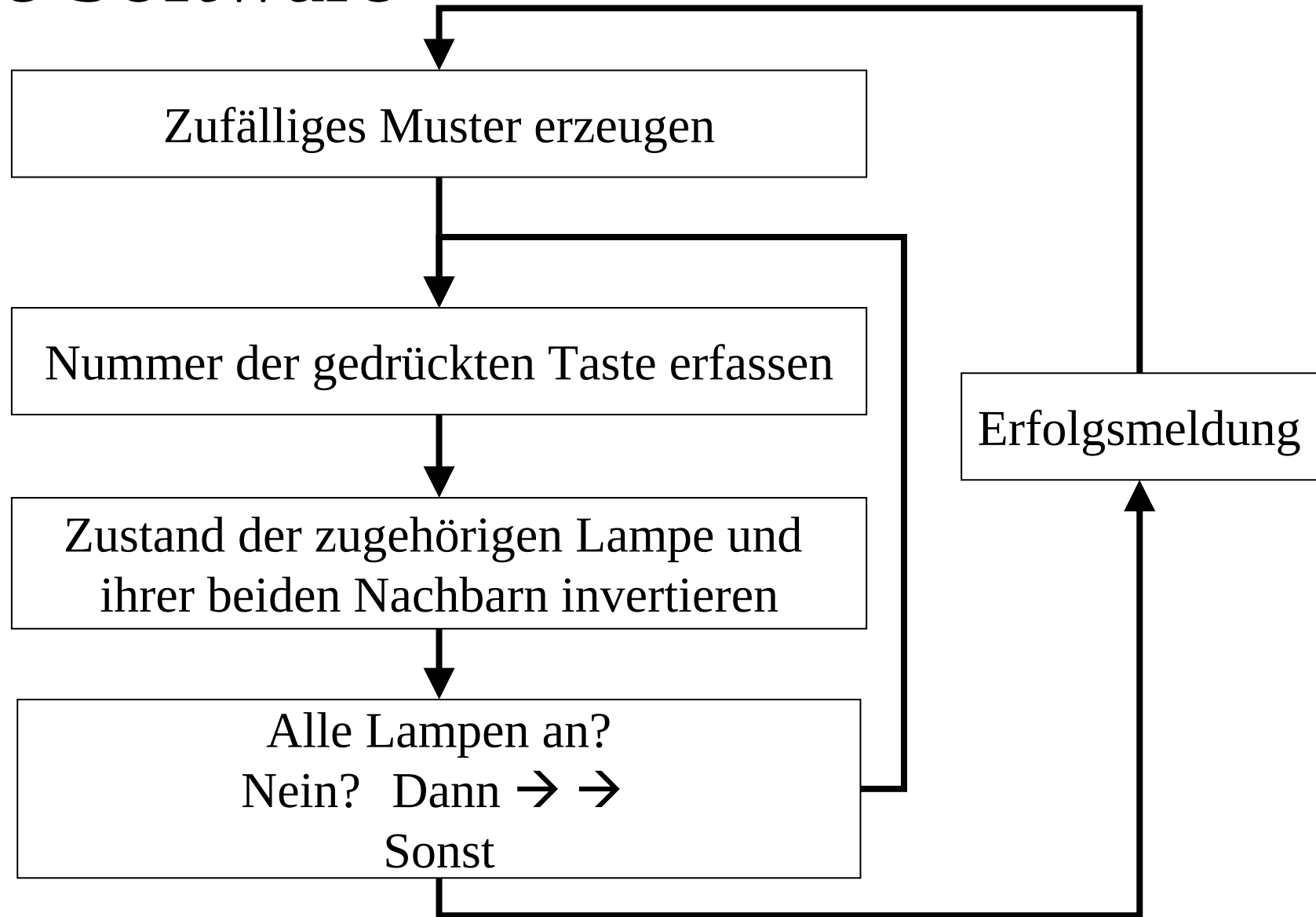
Summe: 12 frei benutzbar

- A0
- A1
- A2
- A3
- A4
- A5
- A6 = nur analog Eingang!
- A7 = nur analog Eingang!

Summe: 8 benutzbar, aber A6+A7
brauchen externen Pullup-
Widerstand

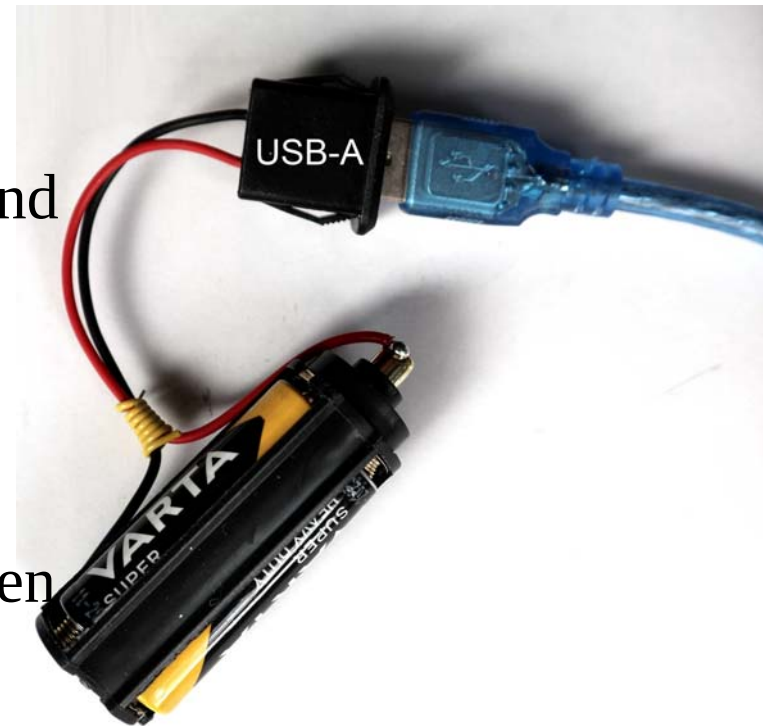
$$12 + 8 = 20 = 2 \times 10, \text{ also reicht es genau}$$

Die Software



Optionen für die Stromversorgung

- USB vom PC oder Netzteil:
Kein mobiler Betrieb möglich
- USB von Power-Bank:
Achtung: Manche Power-Banks erzeugen Störimpulse, erwarten einen Mindest-Stromverbrauch und schalten bei Unterschreitung ab
- DC von Batterien:
Etwas Handarbeit erforderlich, siehe Bild,
3 x AA oder AAA (4,5 V) genügen



Analyse des Spielverlaufs, wenn keine Strategie angewendet wird

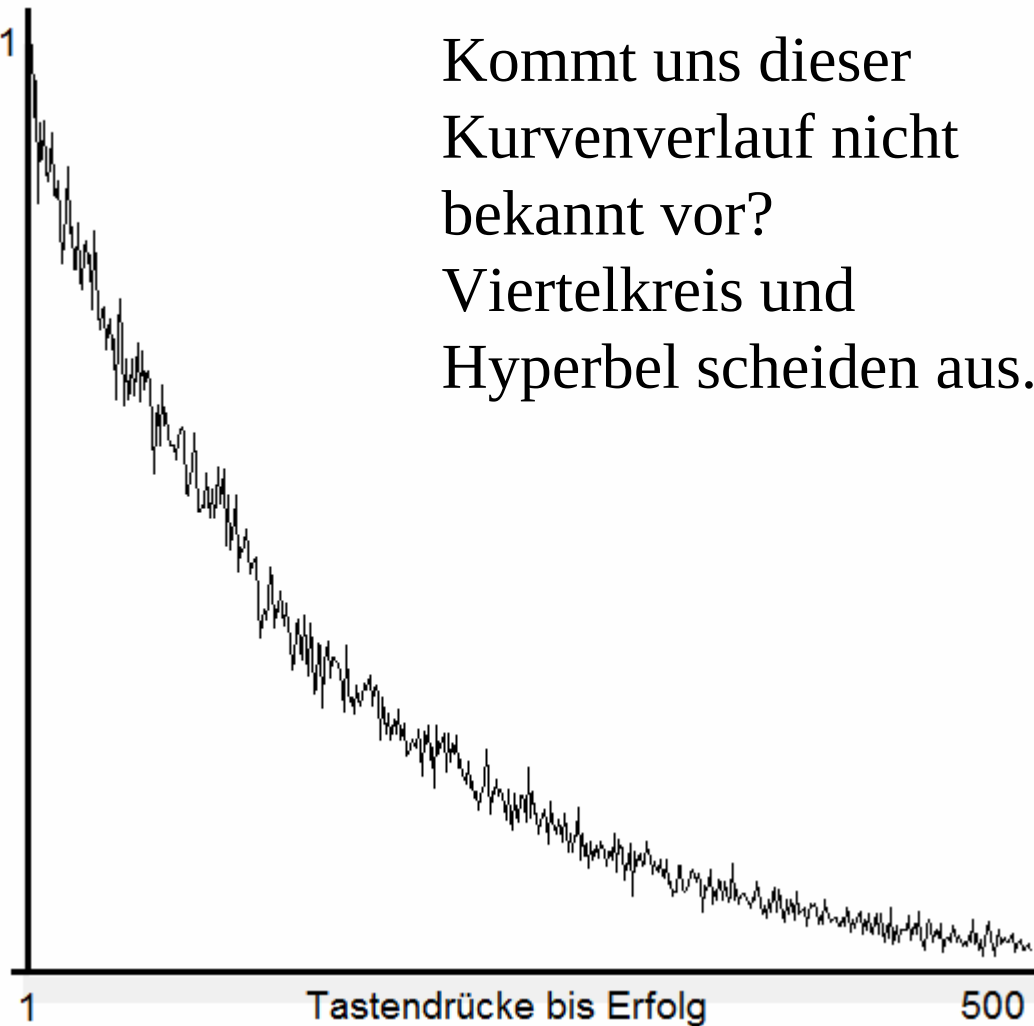
- Mit Glück wird das Ziel bei 10 oder weniger Tastendrücken erreicht, mit Pech nie.
- Was wird die mittlere Zahl der erforderlichen Tastendrücke sein?

Wenn man keinen Plan hat, ...

Simulation eines Spielers, ^{0,01} der keine Strategie hat und nach Zufallsprinzip die Tasten drückt und auch nichts dazu lernt.

Auch er wird nach einer großen Zahl von Tastendrücken wahrscheinlich irgendwann zum Ziel kommen.

Was ist der Erwartungswert der Funktion $y = a \cdot e^{-k \cdot x}$?



Lösung mit Mathematik

- Die Regel wird als 10×10 -Transformationsmatrix **M** formuliert.
- Aktueller Zustand **A** und gedrückte Taste **T** werden als Vektoren dargestellt.
- Der Folgezustand **Z** ergibt sich aus der Addition von **A** mit dem Produkt von **M** und **T** modulo 2.
- Jetzt muss man diese Gleichung mit Hilfe der Inversen von **M** nach **T** auflösen.

Geht das immer?

Die Inverse einer Matrix existiert nur, wenn ihre Determinante nicht Null ist.

Bei den hier vorgegebenen Spielregeln ist das der Fall, wenn die Dimension der Matrix kein Vielfaches von 3 ist.

Damit ist klar:

6 Tasten + 6 Lampen oder 9 Tasten + 9 Lampen würde zu unlösbaren Situationen führen, da in diesen Fällen die Determinante von M gleich null ist und somit keine Inverse von M existiert.